Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2024»
Заключительный тур
11 февраля 2024 года
8 класс (Европа)

▷ **1.** В новой серии Смешариков герои Бараш, Лосяш и Копатыч участвовали в интеллектуальной игре “Сообрази”. Каждому была предложена коробка, в которой 280 спичек. Каждому нужно сложить из всех спичек (ломать их нельзя) прямоугольный треугольник. Все решили эту задачу, но оказалось, что у Лосяша получился самый большой по площади треугольник, а у Копатыча - самый маленький. Какой треугольник построил Бараш, если он оказался отличным от треугольников, построенных его друзьями?

Решение:
$8^2+15^2=17^2$, $8+15+17=40$
$7^2+24^2=25^2$, $7+24+25=56$
$20^2+21^2=29^2$, $20+21+29=70$
НОК(40,56,70)=280
$280=(8+15+17)\cdot 7=56+105+119, S=2940$
$280=(7+24+25)\cdot 5=35+120+125, S=2100$
$280=(20+21+29)\cdot 4=80+84+126, S=3360$
Ответ: Бараш построил треугольник со сторонами 56, 105, 119.

▷ **2.** Пусть $S(n)$ - сумма цифр в десятичной записи натурального числа n. Существуют ли такие натуральные числа, что
а) $n-S(n)=6030$,
б) $n-S(n)=6033$?

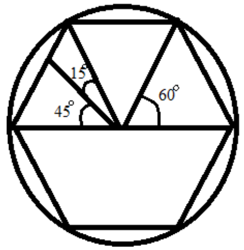
Решение:
n и $S(n)$ имеют один и тот же остаток при делении на 9
$n=\overline{a_1a_2\ldots a_k}=a_1\cdot 10^{k-1}+a_2\cdot 10^{k-2}+\cdots+a_{k-1}\cdot 10+a_k=a_1(9+1)^{k-1}+a_2(9+1)^{k-2}+\cdots+a_{k-1}(9+1)+a_k=9N+(a_1+a_2+\cdots+a_k)=9N+S(n)$
$n-S(n)\vdots 9$
а) $n=6048, S(n)=18;\ 6048-18=6030;$
б) $6033 не \vdots 9 \Rightarrow$ не существует таких n, чтобы выполнить уравнение a.

▷ **3.** Дан прямоугольный бильярд размерами 2024 на 2025. Из точки, находящейся на борту длиной 2025, на расстоянии 100 от угла, выпущен шар под углом 45° к борту. Доказать, что после некоторого числа отражений от бортов шар попадет в угол бильярда. Найти длину пути, пройденного при этом шаром.

Решение:
Рассмотрим прямую $y=x+100$ или прямую $y=-x+100$. Начало движения - точка $(0;100)$. Движение в области $x\geqslant 0$. Условие прохождения через узел сети в первом случае будет $2025n=100+2024m, m>0$. При $m=0$ остаток от деления числа $100+2024m$ на 2025 равен 100. При увеличении m на 1 остаток будет уменьшаться на 1. Первый раз остаток будет равен 0 при $m=100$. Длина траектории в этом случае будет $202400\sqrt{2}$. Во втором случае условие имеет вид $2025n=100-2024m$, решением в этом случае будет $m=1925, n=-1924$. Длина траектории в этом случае будет равна $2024\cdot 1925\sqrt{2}$.

▷ **4.** Пользуясь циркулем и линейкой, разделить угол величиной 45° на три равные части.

Решение: 1. Строим угол 60°. В окружность радиусом 8 вписываем правильный шестиугольник;
2. Строим угол 45°;
3. $45°=15°+15°+15°$.



▷ **5.** Часы пробили полночь. Какой угол между часовой и минутной стрелкой будет через 2024 минуты?

Решение:
2024 минуты = 33 часа 44 минуты = 24 часа + 9 часов + 44 минуты = 24 часа + 9 часов + 44/60 часа = 24 часа + 146/15 часа
$360/12=30°$
360° – угол, на который поворачивается минутная стрелка за 1 час.
6° – угол, на который поворачивается минутная стрелка за 1 минуту.
$A=(146/15)\cdot 30=292°$ — угол, на который повернулась часовая стрелка за 146/15 часа.
$B=6\cdot 44=264°$
$A-B=28.$
Ответ: 28.

▷ **6.** При подготовке к экзамену три школьника решали 2024 задачи. Каждый решил 1200 из них, каждую задачу кто-нибудь решил. Задача называется трудной, если её решил только один школьник, и лёгкой, если её решили все три школьника. Каких задач больше – лёгких или трудных? На сколько?

Решение:
Математической моделью задачи являются круги Эйлера. Обозначим через a_j количество задач, решённых только j-м учеником, через a_{ij} - количество задач, решённых только i-м и j-м учениками, через a_{123} - количество задач, решённых всеми учениками. Тогда количество трудных задач - $a_1 + a_2 + a_3$, лёгких - a_{123}. Нас интересует величина $s = a_1 + a_2 + a_3 - a_{123}$. Согласно условию, имеем систему: $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_{12} + a_{13} + a_{23} + a_{123} = 2024 \\ a_1 + a_{12} + a_{13} + a_{123} = 1200 \\ a_2 + a_{23} + a_{23} + a_{123} = 1200 \\ a_3 + a_{13} + a_{23} + a_{123} = 1200. \end{cases}$
Сложив почленно три последние равенства системы и отняв удвоенное первое, найдём $-a_1 - a_2 - a_3 + a_{123} = 3600 - 4048 = -448$, откуда $s = 448$. Полученный результат означает, что трудных задач больше, и больше на 448.
Ответ: 448.

▷ **7.** Все четные числа, начиная с 2, выписываются подряд: 2468101214... Какая цифра стоит на 2024 месте?

Решение:
Однозначных четных чисел в десятке 4, двухзначных в каждом десятке 5, всего $9 \cdot 5$=45. Трехзначных в каждой сотне 50, всего $9 \cdot 50$=450. Всего цифр в четных числах, не превышающих 1000, 5+2 $\cdot$ 45+3 $\cdot$ 450=1444. Для четырехзначных чисел остается 2024-1444=580=4 $\cdot$ 145. 145 четырехзначное нечетное число 1288. Последняя цифра 8.
Ответ: 8.

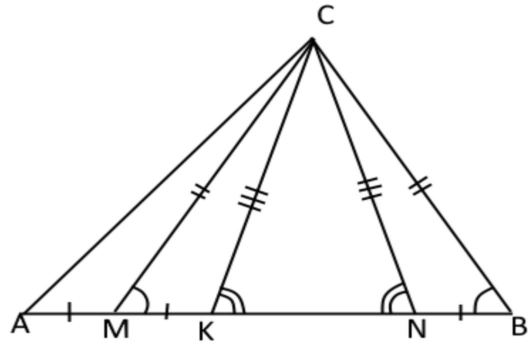
▷ **8.** На стороне AB треугольника ABC отмечены точки M и K. Оказалось, что $AM = MK, CM = CB, \angle AKC = 0,5\angle CAK + 90°$. Найдите длину стороны AC, если длина отрезка MB равна 8 см.

Решение:
По условию треугольник MCB равнобедренный, так как $CM = CB$. Поэтому $\angle CMK = \angle CBK$. Отметим на стороне AB точку N так, чтобы $BN = MK(= AM)$. Тогда $AN = MB$. Далее, $\triangle KMC = \triangle NBC$ по двум сторонам и углу между ними. Тогда, в частности, $CK = CN$, и $\angle ANC = \angle NKC = 180° - (0,5\angle CAK + 90°) = 90° - 0,5\angle CAK$.

Тогда в треугольнике ACN находим

$$\angle ACN = 180° - \angle ANC - \angle CAK =$$
$$= 180° - (90° - 0,5\angle CAK) - \angle CAK =$$
$$= 90° - 0,5\angle CAK = \angle ANC.$$

Следовательно, треугольник ACN равнобедренный, и тогда $AC = AN = MB = 8$.



▷ **9.** В 28-значное число 3*4*1*0*8*2*40923*0*320*2*56 случайным образом вместо звездочек записываются цифры 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Какова вероятность, что полученное число будет делиться на 792.

Решение:
Для того чтобы число делилось на 792, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 8, 9 и 11. Поскольку число оканчивается на 56, то делится на 8 тогда и только тогда, когда третья цифра с конца чётная (их пять из десяти). Сумма цифр числа равна 54, поэтому оно делится на 9. Сумма цифр стоящих на нечетных местах равна 44, на четных 55, их разность делится на 11.
Ответ: 0,5.

▷ **10.** Найдите семь натуральных, попарно различных чисел, сумма кубов которых равнялась бы $199g$ ($g = 10^{100}$).

Решение:
$n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 + n_4^3 + n_5^3 + n_6^3 + n_7^3 = 1990 \cdot (10^{33})^3$
$n_k = d_k : 10^{33}$
$d_1^3 + d_2^3 + d_3^3 + d_4^3 + d_5^3 + d_6^3 + d_7^3 = 1990$
$d_1 = 1, d_2 = 4, d_3 = 5, d_4 = 6, d_5 = 7, d_6 = 8, d_7 = 9.$
$1^3 + 2^3 + \cdots + 9^3 = (\frac{1+9}{2} \cdot 9)^2 = 2025$
$2^3 = 8, 3^3 = 27, 2025 - 2^3 - 3^3 - 1990$

Ответ: $10^{33}; 4 \cdot 10^{33}; 5 \cdot 10^{33}; 6 \cdot 10^{33}; 7 \cdot 10^{33}; 8 \cdot 10^{33}; 9 \cdot 10^{33}$.